

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA BACHARELADO

Emaranhamento e estabilidade em  
cristais temporais localizados

Autor: Rafael Ávila Macêdo

Orientador: Prof. Dr. André Maurício Conceição de Souza

São Cristóvão – SE

Fevereiro / 2020

---

Rafael Ávila Macêdo

Emaranhamento e estabilidade em cristais temporais localizados

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Graduação em Física da Universidade  
Federal de Sergipe, como requisito parcial para  
obtenção do Grau de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. André Maurício Conceição de Souza

São Cristóvão – SE

2020

# Resumo

Ao considerar o efeito da dinâmica quântica sobre uma condução periódica, este trabalho tem como objetivo verificar a influência de interações em fases de cristais temporais em dimensões baixas, tanto em uma rede tipo escada e o caso de uma cadeia unidimensional. Tanto para a evolução temporal unitária e a obtenção de estados iniciais, foi utilizado o método de diagonalização exata. Foi encontrado que as amplitudes de saturação características da fase diminuem com o aumento da interação de troca mediada pela escala de energia  $J$ , atribuído ao aumento da entropia de estados iniciais e a evolução temporal da mesma na fase localizada. É notado também que o tempo característico da saturação das amplitudes é o mesmo da saturação da entropia.

Palavras-chave: Localização, emaranhamento, dinâmica quântica, spins.

# Abstract

Fully considering the quantum dynamics effects on a periodic drive, this work aims to study the influence of interactions on time crystals in low dimensions, both in a one-dimensional chain and in a ladder configuration. For both the unitary time evolution and computing the initial states, exact diagonalization methods are used. It was found that the saturation values for the characteristic oscillations decrease for a increasing exchange interaction mediated by a energy scale  $J$ , attributing to a combination of large entanglement in the initial states and a fast entropy growth due to many-body localization. It was also noted that the characteristic time of saturation of amplitudes is the same as that of entanglement entropy.

Keywords: Localization, entanglement, quantum dynamics, spins.

Dedicado para todos da comunidade científica que ainda se maravilham com a natureza e ajudam a empurrar as fronteiras da física teórica.

# Agradecimentos

Aos meus pais: Marcelo Andrade Macêdo, Ana Paula Barbosa Ávila Macêdo e toda minha família, por sempre me apoiarem na carreira científica.

Ao meu orientador André Maurício Conceição da Silva, pelo suporte na orientação e a sugestão de um fascinante tópico de pesquisa.

A todos os meus colegas de curso durante esses quatro anos: Thiago Dantas, José Henrique, Gilliard Rocha, Adriano Farias, Luiza Miranda, Klivan Oliveira, Hugo Henrique e em especial, meu grande amigo Matheus Filipe, pelo apoio e companhia.

# Lista de Figuras

1.1	Ilustração do parâmetro de ordem nas duas fases do modelo de Ising, em uma região da rede. (a): Uma das fases ferromagnéticas quebrando a simetria das interações, (b): Fase com $m = 0$ , chamada de paramagnética, que preserva a simetria $P$ . . . . .	2
1.2	Demonstração pictórica das possibilidades da evolução temporal quântica: Para sistemas localizados, há uma memória da distribuição inicial, enquanto para sistemas que termalizam, há perda desta memória. Retirado da figura 1 da ref. [1]. . . . .	3
2.1	Divisão do sistema completo em dois subsistemas $A$ e $B$ . Tomamos $ A  <  B $ para as considerações sobre termalização. . . . .	6
2.2	(a): Dividimos em subsistemas $A$ e $B$ uma cadeia de spins, onde não há emaranhamento entre os mesmos; (b): Ao considerar interações, há um emaranhamento de spins próximos à fronteira, em um comprimento de correlação característico $\xi$ . . . . .	11
3.1	Evolução temporal e espectro da função de auto-correlação, com a média tomada em 100 realizações de desordem. (a) $R(t) = \langle \sigma_i^z(i) \sigma_i^z(0) \rangle$ para alguns parâmetros: O caso $\epsilon = J_z = 0$ (em azul) indica as oscilações "perfeitas", e ao introduzir imperfeições $\epsilon = 0.2, J_z = 0$ (em laranja) há uma defasagem, não ocorrendo a quebra de simetria temporal. Quando interações são introduzidas, $\epsilon = 0.15, J_z = 0.15$ , as oscilações são estabilizadas com o período de $2T$ , (b) Módulo da transformada de Fourier de $R(t)$ , normalizada pelo máximo do pico da evolução "spin echo", que se sobrepõe ao caso interagente. Nota-se a defasagem no caso de $\epsilon = 0.2, J_z = 0$ . Para detalhes da simulação, ver a seção 4.1. . . . .	21

4.1	As duas geometrias consideradas, ambas em condições de contorno periódicas. (a): Geometria da rede escada, onde as interações de troca da cadeia superior é igual a da cadeia inferior; (b): Cadeia linear de spins. . . . .	24
4.2	Fluxograma do algoritmo para uma realização de desordem, explicação no texto principal. . . . .	25
4.3	Função de correlação $R(t) = \langle \sigma^z(t) \sigma^z(0) \rangle$ , para $n_{max} = 100$ ciclos de Floquet. (a): caso unidimensional, (b): caso na rede escada, onde as amplitudes de saturação são menores. . . . .	26
4.4	A amplitude de saturação $R(t_{max})$ , no caso da rede escada e o caso unidimensional. . . . .	27
4.5	Módulo da transformada de Fourier definida na eq. (4.5). (a): caso unidimensional, (b): caso na rede escada, com picos de menor intensidade. Em ambos os casos, há um pico bem definido em $\omega = \Omega/2$ para todos os valores de $J$ , uma assinatura visível da fase de cristal temporal. . . . .	27
4.6	Evolução de $R(t)$ em relação à $\log(Jt)$ . (a): caso unidimensional, (b): caso na rede escada. É notável a saturação nas três últimas curvas para o caso da rede escada. . . . .	28
4.7	Entropias de emaranhamento para o auto-estado mais próximo de $\epsilon = 0.5$ , para vários valores de $J$ em ambos os casos. A entropia para o caso da rede escada se mantém maior. . . . .	29
4.8	Ilustração do argumento da entropia em estados dimerizados: (a): caso da rede escada, (b): caso unidimensional, com um número menor de spins emaranhados na fronteira. . . . .	29
4.9	Evolução da entropia de emaranhamento em relação à $\log(Jt)$ . (a): caso unidimensional, (b): caso na rede escada. . . . .	30
4.10	Estudo das oscilações para estados iniciais do tipo da eq. (4.4), com ambos os gráficos plotados em relação à $\log(Jt)$ , média sobre $N_d = 20$ realizações de desordem. (a): Amplitudes para os três valores de interações consideradas. Notamos que, para $J = 1.1$ , já não há oscilações. (b): Dinâmica da entropia, com três saturações em tempos diferentes. O valor da saturação é diferente para as três curvas, que atribuímos a um número de realizações menor em comparação com as simulações realizadas anteriormente. . . . .	31



# Sumário

<b>Resumo</b>	ii
<b>Abstract</b>	iii
<b>Agradecimentos</b>	v
<b>Lista de Figuras</b>	vii
<b>1 Introdução</b>	1
<b>2 Termalização e localização</b>	5
2.1 Termalização e a localização de Anderson . . . . .	5
2.2 Localização de muitos corpos e sua descrição emergente . . . . .	9
2.2.1 Evolução temporal da entropia no modelo efetivo . . . . .	13
<b>3 Sistemas de Floquet e Cristais temporais</b>	16
3.1 Formalismo de sistemas de Floquet . . . . .	16
3.2 Cristais temporais . . . . .	17
3.2.1 Cristais temporais localizados: Evitando termalização com desordem	19
<b>4 Dinâmica da entropia e estabilidade das oscilações</b>	23
4.1 O modelo e metodologia . . . . .	23
4.2 Amplitudes das oscilações na fase tempo-cristalina . . . . .	25
4.3 Dinâmica da entropia . . . . .	28
<b>5 Conclusão</b>	33
<b>Appendices</b>	34

**A Transformação de Jordan-Wigner****35****Referências Bibliográficas****36**

# Capítulo 1

## Introdução

A evolução temporal de sistemas quânticos são estudadas desde a origem da mecânica quântica, porém em um contexto na física de poucas partículas: Exemplos canônicos de efeitos não-triviais são generalizações perturbativas do sistema de dois níveis [2].

Por outro lado, sistemas de muitas partículas são estudados de maneira extensiva no equilíbrio termodinâmico, levando as chamadas fases da matéria, que emergem em combinação de suas interações e um número muito grande de partículas [3]. Baseando-se no chamado princípio de quebra de simetria [4], onde, ao supor que fases diferentes possuem simetrias diferentes, emerge o conceito de parâmetro de ordem, uma quantidade física com o intuito de distinguir diferentes fases. O exemplo canônico é o caso do magnetismo: considere um conjunto de spins clássicos descritos pelas variáveis  $\sigma_i = \pm 1$  na rede quadrada interagindo via o modelo de Ising, descrito pelo hamiltoniano:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j , \quad (1.1)$$

é possível perceber a expressão acima é invariante pela transformação  $P : \sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ : se conotarmos os dois valores de  $\sigma_i$  como duas direções de um vetor paralelo a um eixo, fisicamente esta transformação corresponde a girar todos os  $N$  spins na rede. A pergunta que levou a propor o modelo acima foi a possibilidade de obter um estado *ferromagnético*, que pode ser definido como um estado onde todos os spins apontam para a mesma direção, mesmo na ausência de um campo magnético.

Para estudar a possibilidade desta fase, nota-se que, em um estado desta natureza, como  $\uparrow\uparrow \cdots \uparrow$ , é possível somar todos os valores de  $\sigma_i$  para obter  $N$ , notando também que  $\langle \sum_i \sigma_i \rangle \neq N$  para qualquer estado que não seja o ferromagnético. É natural então definir

a chamada *magnetização* como o parâmetro de ordem da fase:

$$m \equiv \frac{1}{N} \left\langle \sum_i \sigma_i \right\rangle, \quad (1.2)$$

onde as médias são tomadas no ensemble canônico da física estatística, por exemplo [5]. Nota-se também que a fase ferromagnética não é invariante sob  $P$ : A transformação irá levar uma fase ferromagnética para a outra:  $\uparrow\uparrow \cdots \uparrow \rightarrow \downarrow\downarrow \cdots \downarrow$ , e o valor da magnetização mudará o sinal de  $+1$  para  $-1$ . Na realidade, pode-se mostrar que configurações que satisfazem  $P$  devem satisfazer  $m = 0$  [5], com a intuição física que as direções dos spins devem se balancear para o total ser zero. Logo, a partir da análise da simetria das interações e da fase em questão, é possível determinar um parâmetro de ordem, como ilustrado na figura 1.1.

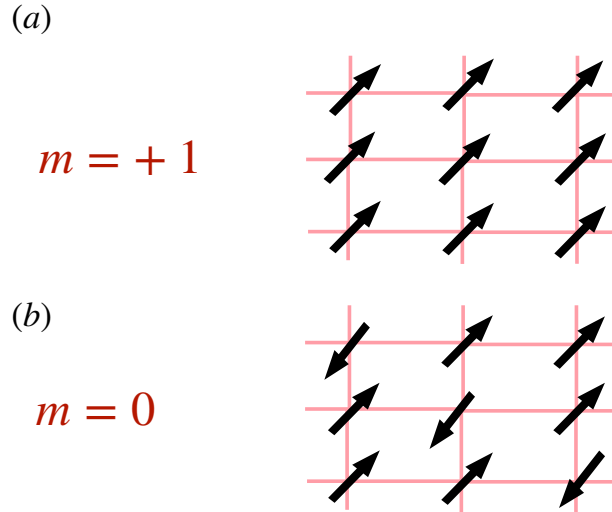


Figura 1.1: Ilustração do parâmetro de ordem nas duas fases do modelo de Ising, em uma região da rede. (a): Uma das fases ferromagnéticas quebrando a simetria das interações, (b): Fase com  $m = 0$ , chamada de paramagnética, que preserva a simetria  $P$ .

A fenomenologia apresentada acima é confirmada pelos famosos cálculos de Onsager [6], que demonstrou, para o caso da rede quadrada, que há uma temperatura crítica onde há quebra de simetria e, consequentemente, ordenamento magnético.

Vale ressaltar que a discussão acima foi realizada para um modelo clássico: Os termos incluídos nas interações de  $H$  comutam entre si, e as energias do sistema são dadas exclusivamente para cada configuração de spins. Entretanto, a mesma fenomenologia vale para sistemas quânticos: Ao considerar baixas temperaturas, apenas o estado fundamental

e excitações do mesmo são relevantes. Logo, podemos analisar se este quebra alguma simetria de  $H$ , e verificar as possíveis transições de fases em termos dos parâmetros que regem as interações. Este estudo é denominado de *fases quânticas* [7], que foram explicadas a partir de modelos efetivos do parâmetro de ordem [8]: como supercondutividade [9], fases magnéticas mais gerais [10], e sólidos [11].

Acreditava-se, em muitos estudos de sistemas de física de muitos corpos, que a dinâmica temporal levaria ao equilíbrio termodinâmico, onde o estado final não possui informação sobre os detalhes do estado inicial (ver figura 1.2 (superior)) e é dito que o sistema *termaliza*. Porém, notado primeiramente por Anderson no contexto de sistemas de férmions não-interagentes [12], a presença de desordem em sistemas quânticos pode induzir a *localização*: A possibilidade dos estados finais possuírem uma memória dos estados iniciais, como ilustrado na figura 1.2 (inferior). Recentemente, notou-se que sistemas interagentes também podem exibir esta propriedade, constituindo uma nova fase da matéria conhecida como localização de muitos corpos [13].

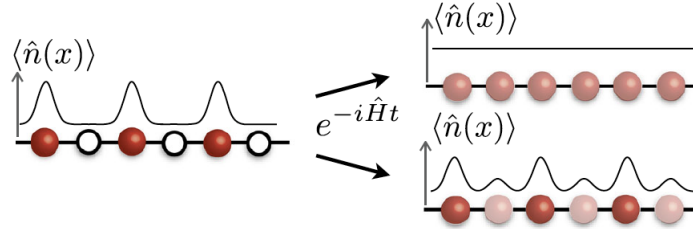


Figura 1.2: Demonstração pictórica das possibilidades da evolução temporal quântica: Para sistemas localizados, há uma memória da distribuição inicial, enquanto para sistemas que termalizam, há perda desta memória. Retirado da figura 1 da ref. [1].

Ambos os casos constituem fases da matéria, pois há como quantificar parâmetro(s) de ordem [14], como a entropia de emaranhamento (discutida com mais detalhes no capítulo 4), e a estatística dos níveis de energia [15], que não abordamos em detalhes. Além de serem fenômenos de natureza puramente quântica, enquanto na fase localizada, há a possibilidade de exibir outras fases dinâmicas que são proibidas no equilíbrio termodinâmico.

Uma destas possíveis fases são os chamados cristais temporais: fases que quebram a simetria de translação temporal [16], que, entretanto, são proibidas no equilíbrio termodinâmico [17]. Como não há termalização em sistemas localizados, abre a possibilidade de haver um parâmetro de ordem  $\langle \Phi \rangle$  para caracterizar esta fase. O caso mais simples é para

sistemas quânticos periódicos, denominados de sistemas de Floquet, que, como explorado em [18], é a primeira confirmação de uma fase quântica fora do equilíbrio. Apresentamos a intuição a seguir.

Considere que há um sistema com período  $T$ : ou seja, o hamiltoniano  $H$  é periódico em  $T$ . Assim como o modelo de Ising, isso induz uma simetria, ou seja, há um operador  $O_T$  que comuta com o hamiltoniano e gera a evolução temporal no período  $T$  (o qual discutimos com detalhes no capítulo 3). Imaginamos agora que temos uma determinada observável  $\phi(t)$  que possui oscilações características em um período diferente de  $T$ : Desta forma há uma quebra de simetria temporal, e as oscilações de  $\phi(t)$  é um válido parâmetro de ordem para os cristais temporais.

Logo, há a presença simultânea de duas fases bem definidas nestes sistemas de Floquet, cristais temporais e a localização de muitos corpos. O objetivo deste trabalho é estudar como ambas influenciam a evolução temporal de observáveis na presença de interações, e se há características comuns entre ambas.

No próximo capítulo, fazemos uma revisão da fase termal e a fase localizada, focando nas propriedades únicas da localização de muitos corpos, como a integrabilidade emergente e o papel da entropia de emaranhamento. No capítulo 3, discutimos sistemas quânticos periódicos e propriedades de cristais temporais. Apresentamos os principais resultados no capítulo 4, ligando a dependência temporal da entropia com as oscilações características nos cristais temporais. Finalizamos com uma conclusão no capítulo 5.

# Capítulo 2

## Termalização e localização

### 2.1 Termalização e a localização de Anderson

Consideramos a evolução temporal de um sistema quântico descrito por um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , e um estado inicial em  $t = 0$  incerto, definido pelo *ensemble*  $\{c_j, \psi_j\}$ : Há a probabilidade  $c_j$  do sistema estar no estado  $|\psi_j\rangle$ . Há uma conveniente maneira de representar este estado, por meio da *matriz densidade* [19]:

$$\rho(0) = \sum_j c_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| . \quad (2.1)$$

Agora supomos também um hamiltoniano  $H$  e sua evolução temporal dada pelo unitário  $U(t)$ . O operador acima evoluirá a partir da seguinte equação:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t) . \quad (2.2)$$

Nesta seção discutiremos uma das possibilidades para a evolução acima. Considere dois subsistemas,  $A$  e  $B$ , como indicado na figura 2.1.

No formalismo de matrizes densidade, é possível escrever a chamada *matriz densidade reduzida* do subsistema  $A$  como:

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho , \quad (2.3)$$

onde  $\text{Tr}_B$  é o traço definido no espaço de Hilbert que descreve o sistema  $B$ .

Na física estatística, há a noção de reservatório: Consideramos o sistema total  $S$  em contato termodinâmico com um reservatório  $R$ , de modo que  $R + S$  é isolado. A

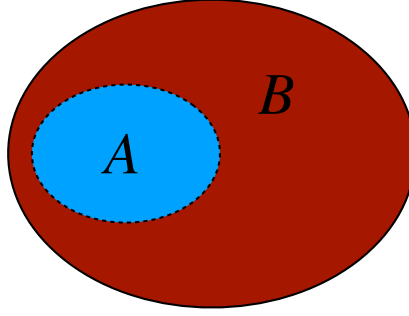


Figura 2.1: Divisão do sistema completo em dois subsistemas  $A$  e  $B$ . Tomamos  $|A| < |B|$  para as considerações sobre termalização.

ideia é que, fazendo  $|R| \gg |S|$ , ou seja, considerando o limite onde o número de graus de liberdade em  $R$  são muito maiores do que aqueles definidos em  $S$ , valem os postulados fundamentais do equilíbrio termodinâmico [5], e o estado em  $S$  pode ser descrito a partir de um *estado de Gibbs*:

$$\rho_{Gibbs}(\beta) = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \quad ; \quad Z = \text{Tr}[e^{-\beta H}] , \quad (2.4)$$

onde  $Z$  é a *função de partição* do sistema, e  $\beta$  é o inverso da temperatura (em unidades onde  $k_B = 1$ ). Pode haver mais parâmetros intensivos além da temperatura para descrever outras grandezas conservadas (como o potencial químico  $\mu$  no caso de conservação do número de partículas), consideramos no momento o caso mais simples com conservação de energia apenas. Também é possível, no formalismo de matrizes densidade, calcular valores esperados a temperatura finita:

$$\langle O \rangle_\beta = \text{Tr}[O \rho_{Gibbs}] = \frac{\text{Tr}[O e^{-\beta H}]}{Z} . \quad (2.5)$$

Tomamos agora a evolução temporal do sistema quântico fechado com duas partições descrito na figura 2.1, com o estado na partição  $A$  descrito como  $\rho_A(t) = \text{Tr}_B \rho(t)$ . É dito que  $A$  termaliza, ou que  $B$  age como um reservatório de  $A$ , se, para,  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{|B| \rightarrow \infty} \rho_A(t) \rightarrow \rho_{Gibbs}^A(\beta) , \quad (2.6)$$

para todos os estados iniciais  $\{\rho(0)\}$ . Em particular, podemos considerar auto-estados, que possuem evolução temporal trivial (a menos de uma fase). Logo, neste caso, termalização vale, se, para todos os auto-estados  $|n\rangle$ :



$$\lim_{|B| \rightarrow \infty} \rho_A(t) = \lim_{|B| \rightarrow \infty} \text{Tr}_B |n\rangle \langle n| = \rho_{Gibbs}^A(\beta) , \quad (2.7)$$

está é a *hipótese da termalização de auto-estados* [14], e já foi verificada numericamente para uma variedade de sistemas [20], [21], [22], [23].

Um caso bem estabelecido na literatura que apresenta ausência de termalização pela definição acima são sistemas integráveis [24], que possuem um número extensivo de quantidades conservadas, logo, não há um estado de Gibbs usual (que deve possuir um número finito de grandezas conservadas no limite termodinâmico). Há uma generalização da termalização para sistemas integráveis [25], que não iremos tratar.

Uma maneira de visualizar a ausência de termalização para modelos integráveis é considerar sistemas de spin, verificando a hipótese de termalização de auto-estados. Em sistemas de spins, imaginamos que há  $\mathcal{O}(N)$  cargas [1] conservadas, dadas por:

$$[H, \sigma_i^z] = 0 \quad ; \quad [\sigma_i^z, \sigma_j^z] = 0 , \quad (2.8)$$

onde  $\sigma_i^z$  é a matriz de Pauli que descreve a direção  $z$  do spin definido no sítio  $i$ , ou seja, um sistema clássico de spins. Neste caso, os auto-estados de  $H$  serão definidos por configurações  $\otimes_i |\sigma_i\rangle$ , onde  $|\sigma_i\rangle = |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  são auto-estados de  $\sigma_i^z$ . Seja  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$  dois auto-estados adjacentes no espectro de energia, que diferem apenas no estado do primeiro spin:

$$|\psi_1\rangle = |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\cdots\rangle \quad ; \quad |\psi_2\rangle = |\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\cdots\rangle , \quad (2.9)$$

as observáveis desse sistema são dadas por combinações lineares de  $O_\alpha = \prod_{\{\alpha\}} \sigma_\alpha^z$ , onde  $\{\alpha\}$  é um subsistema. Por exemplo, para  $\{\alpha\} = \{1, 2, 7\}$ , temos a observável  $O_{127} = \sigma_1^z \sigma_2^z \sigma_7^z$ . Ao escolhermos uma partição  $A$  onde o primeiro spin pertence a  $A$ , e escolhemos  $O_1 = \sigma_1^z$  como observável, é possível notar que:

$$\langle \psi_1 | O_1 | \psi_1 \rangle \neq \langle \psi_2 | O_1 | \psi_2 \rangle , \quad (2.10)$$

com esta diferença persistindo no limite termodinâmico (é sempre possível escolher um par de auto-estados diferindo de um spin pertencente a região  $A$ ). Uma observável utilizada para entender a hipótese de termalização de auto-estados é [20]:

---

<sup>1</sup>usaremos *cargas*, no geral, para denotar quantidades conservadas.

$$\delta O_n = \langle n+1|O|n+1\rangle - \langle n|O|n\rangle, \quad (2.11)$$

onde  $E_{n+1} > E_n$ . Se termalização se verifica,  $\delta O_n \sim (e^{-N}) \rightarrow 0$ . Logo, sistemas integráveis não satisfazem a hipótese de termalização de auto-estados, por conta da persistência da eq. (2.10).

Em um trabalho seminal [12], Anderson notou que há sistemas (não integráveis) que não termalizam quando há a introdução de desordem, ou seja, acoplamentos do sistema não são mais translacionalmente invariantes. O hamiltoniano inicialmente estudado foi de férmions em uma rede infinita, na presença de um potencial aleatório:

$$H = t_s \sum_{\langle ij \rangle} (c_i^\dagger c_j + c_j^\dagger c_i) + \sum_i U_i c_i^\dagger c_i, \quad (2.12)$$

onde o termo  $\propto t_s$  descreve a amplitude de um salto de um sítio  $i$  para o sítio  $j$  (e o processo contrário) e o segundo termo descreve a interação com o potencial  $U_i$ , escolhido a partir de uma distribuição  $P(U)$  com uma escala de desordem característica  $W$  (na maioria dos estudos, é considerado a distribuição uniforme  $[-W/2, W/2]$  [26]). Para  $W$  suficientemente grande (em relação a amplitude  $t$ ), ocorre a chamada *localização de Anderson*: Auto-funções de onda fermiônicas são localizadas em uma determinada região do espaço:

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) \sim \exp\left(\frac{-|\mathbf{r} - \mathbf{R}_\alpha|}{\xi}\right), \quad (2.13)$$

onde  $\xi$  é chamada intensidade da localização, e depende da energia e  $W$ . Para  $t \gg W$ , temos uma fase onde não há localização, e elétrons possuem função de onda de caráter difusivo. Esta transição pode ser entendida como uma transição do tipo metal-isolante [26]: Na fase localizada, não há condutividade, enquanto que, na fase onde não há localização, há transporte metálico.

Porém, recentemente, a conexão de propriedades de transporte e termalização são melhores entendidas [14], e as ideias de localização são mais gerais e melhores exploradas em sistemas interagentes, tópico que iremos discutir na próxima seção.

## 2.2 Localização de muitos corpos e sua descrição emergente

O objeto de estudo principal será sistemas do tipo:

$$H = \sum_{\alpha} J^{\alpha} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i^{\alpha} \sigma_j^{\alpha} + \sum_i h_i \sigma_i^z, \quad (2.14)$$

onde  $\sigma_i^{\alpha}$ , com  $\alpha = x, y, z$  são as matrizes de Pauli satisfazendo as regras de comutação canônicas:  $[\sigma_i^{\alpha}, \sigma_j^{\beta}] = i\epsilon_{ijk}\delta_{\alpha\beta}\sigma_k^{\alpha}$ , e  $h_i$  são campos regidos pela distribuição uniforme em  $(-h, h)$ . Consideramos somente o caso unidimensional nesta seção.

É possível mapear a eq. (2.14) em um problema de férmions sem spin, utilizando a transformação de Jordan-Wigner [27] (ver Apêndice A). No caso onde  $J^x = J^y = J^{xy}, J^z = 0$  (modelo  $XY$ ), temos:

$$H_{XY} = \frac{J^{xy}}{2} \sum_i (f_{i+1}^{\dagger} f_i + h.c.) + 2 \sum_i h_i f_i^{\dagger} f_i, \quad (2.15)$$

onde reconhecemos o modelo de Anderson descrito na equação (2.12), com  $W = 2h$ . Logo, localização deve ocorrer também para o caso geral, incluindo quando  $J^z \ll 1$ , assumindo que a localização é resistente a perturbações (fenomenologia confirmada pela análise perturbativa em [13]). Porém, a intuição física da transição metal-isolante não é mais válida (pois todo sistema de spin é um isolante, de forma que não há condutividade), e é necessário outra abordagem para as fases de localização/termalização.

Para generalizar o conceito de localização, devemos encontrar um "parâmetro de ordem" para distinguir ambas as fases, como discutido no cap. 1. Iremos demonstrar que um válido parâmetro de ordem é a entropia de emaranhamento no subsistema  $A$ , definida como [19]:

$$S_A = -\text{Tr}_A[\rho_A \log \rho_A] = -\sum_i \lambda_i^A \log \lambda_i^A, \quad (2.16)$$

onde  $\rho_A$  é a matriz densidade reduzida em  $A$ , definida na eq. (2.3), e  $\lambda_i^A$  seus auto-valores. Para sistemas que termalizam, a entropia possui a forma:

$$S_A \sim \text{vol}(A) \sim \mathcal{O}(N_A), \quad (2.17)$$

onde  $vol(\dots)$  é interpretado como o número de graus de liberdade dentro do subsistema em questão. O resultado acima está em concordância com a extensividade da entropia clássica [23].

Há um argumento de caráter semi-clássico: considere a entropia de Boltzmann em  $A$ , ou seja,  $S_A^{Boltz} = \log \Omega_A$ , onde  $\Omega_A$  é o número de microestados disponíveis no subsistema  $A$ . No caso de um sistema quântico, há a escolha de  $\Omega_A = \dim \mathcal{H}_A$ , onde  $\mathcal{H}_A$  é o espaço de Hilbert definido em  $A$  (neste caso,  $S_A^{Boltz}$  é denominada de entropia quântica de Boltzmann [28]). Logo, para graus de liberdade locais com dimensão  $d$ , temos  $\Omega_A = d^{N_A}$ , implicando em  $S_A^{Boltz} \sim \mathcal{O}(N_A)$ . Se assumirmos que, quando há termalização, a entropia de emaranhamento se torna a entropia quântica de Boltzmann (um requerimento plausível para estados de Gibbs), garantimos a extensividade.

Estados fundamentais de sistemas quânticos são um contra-exemplo, possuindo a chamada "regra da área": A entropia desses estados geralmente crescem com o volume da *fronteira* de  $A$  [29]:

$$S_A \sim vol(\partial A) . \quad (2.18)$$

Iremos demonstrar, via um argumento fenomenológico, que estados localizados também possuem esta propriedade, seguindo a ref. [1] (o argumento original foi desenvolvido em [30]). Imaginamos que particionamos um sistema em  $A$  e  $B$ , cuja desordem característica  $W$  é grande o suficiente:  $W \gg \max \Lambda_i$ , onde  $\Lambda_i$  são as escalas das interações presentes, ou seja, há localização. Podemos dividir  $H(\Lambda_i)$  em:

$$H = H_A + H_B + V_{AB} , \quad (2.19)$$

onde  $V_{AB}$  é um termo que descreve as interações entre as partições  $A$  e  $B$ , ou seja, definido em  $\partial A$ . Se consideramos apenas  $H_0 = H_A + H_B$ , temos auto-estados do tipo:

$$|A_i B_j\rangle = |A_i\rangle \otimes |B_j\rangle , \quad (2.20)$$

onde  $|A_i\rangle, |B_j\rangle$  são auto-estados de  $H_A, H_B$ , respectivamente. Neste caso, temos  $\rho_A = \text{Tr}_B |A_i B_j\rangle \langle A_i B_j| = |A_i\rangle \langle A_i|$ , que é um *estado puro*, implicado que  $S_A = 0$  [19]. Consideremos agora o sistema com interações na fronteira, descritas por  $V_{AB}$ . Como o sistema inteiro na eq. (2.19) está localizado, as interações irão agir em um comprimento finito  $\xi$  da fronteira, emaranhando spins que estão nesta região, com um decaimento exponencial

(ver figura 2.2). Logo, esperamos que os novos auto-estados obtidos de  $|A_i B_j\rangle$  possuam emaranhamento apenas para spins próximos da fronteira, gerando uma entropia correspondente da eq. (2.18). Este resultado foi verificado numericamente em modelos de spin localizados [30], [31].

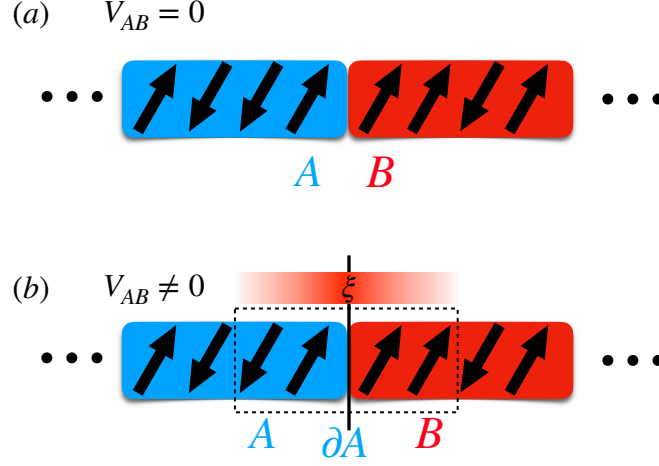


Figura 2.2: (a): Dividimos em subsistemas  $A$  e  $B$  uma cadeia de spins, onde não há emaranhamento entre os mesmos; (b): Ao considerar interações, há um emaranhamento de spins próximos à fronteira, em um comprimento de correlação característico  $\xi$ .

Verificamos como esta propriedade de estados localizados pode ser utilizada para construir uma descrição efetiva da fase. Considere então o modelo de spins da eq. (2.14), em uma dimensão, com  $J^{xy} \rightarrow 0$ . Temos então um sistema integrável do tipo descrito na eq. (2.8), o modelo de Ising com um campo aplicado:

$$H = J^z \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \sum_i h_i \sigma_i^z, \quad (2.21)$$

com auto-vetores dado por configurações do tipo  $|\{\sigma\}\rangle = \otimes |\sigma_i\rangle$ , ou seja, com entropia nula. Considere agora  $J^{xy} \ll 1$ , mantendo a fase localizada do sistema. O argumento da regra da área implica que podemos obter os novos estados localizados a partir de uma transformação unitária *quasi-local*  $U$  [32]. A ideia física é que podemos expandir  $U$  da seguinte maneira [1]:

$$U = \prod_n \prod_i U_{\{i\}}^{(n)}, \quad (2.22)$$

onde  $U_{\{i\}}^{(n)}$  é um unitário envolvendo  $n$  spins vizinhos, por exemplo:  $U_{i,i+1,i+2,i+3}^{(4)}$  descreve

um unitário de quatro sítios, envolvendo os spins localizados em  $i$ ,  $i + 1$ ,  $i + 2$  e  $i + 3$ . Também é introduzido um vínculo devido ao comprimento de localização: Espera-se que o unitário de  $n$ -ésima ordem apenas aja em spins exponencialmente próximos:

$$||1 - U_{\{i\}}^{(n)}|| \sim e^{-n/\xi}, \quad (2.23)$$

de acordo com a física da fase localizada. Desta maneira, considere novos operadores  $\tau_i^\alpha$ , definidos como:

$$\tau_i^\alpha = U \sigma_i^\alpha U^\dagger, \quad (2.24)$$

com base da discussão sobre sistemas integráveis, imaginamos que estamos na fase localizada com alta desordem  $W \gg J^z$ . Neste caso, podemos construir  $\mathcal{O}(N)$  cargas conservadas  $\{\tau_i^z\}$ , emergentes do fato que podemos ligar estados com entropia nula com estados que escalam com uma regra de área, a partir da transformação quasi-local acima. Logo, para escrever um hamiltoniano efetivo dos novos graus de liberdade, impomos:

- **Integrabilidade:** Deve ser diagonal em  $\{\tau_i^z\}$ , satisfazendo  $[H_{eff}, \tau_i^z] = 0$ ,  $[\tau_i^z, \tau_j^z] = 0$ .
- **Quasi-localidade:** Cada termo da interação deve ter um suporte com um decaimento exponencial, caracterizado por uma "distância máxima"  $l = l(\xi)$  [32], dada a estrutura quasi-local do unitário de transformação.

Impondo essas condições, escrevemos:

$$H^{eff} = \sum_i \tilde{h}_i \tau_i^z + \sum_{i,j} \tilde{J}_{ij} \tau_i^z \tau_j^z + \sum_{i,j,k} \tilde{K}_{ijk} \tau_i^z \tau_j^z \tau_k^z + \dots, \quad (2.25)$$

onde  $\tilde{J}$  e  $\tilde{K}$  decaem exponencialmente em relação a distância máxima de cada interação:

$$\tilde{J}_{ij} \propto J_0 e^{-|i-j|/l} \quad ; \quad \tilde{K}_{ijk} \propto J_0 e^{-|i-k|/l}. \quad (2.26)$$

Os novos graus de liberdade  $\tau_i^\alpha$  são chamados de "l-bits" na literatura (de bits localizados), distinguindo-se dos  $\sigma_i^\alpha$ , chamados de "p-bits" (de bits físicos). A analogia a ser feita é da teoria de líquidos de Fermi de Landau, que descreve sistemas partículas interagentes em uma descrição de "quasi-partículas" não interagentes. A diferença é que

a descrição de Landau é válida para excitações de baixa energia do estado fundamental, enquanto que a descrição acima vale em todo o espectro localizado [1]. O modelo efetivo de "l-bits" também pode ser derivado a partir de uma análise de grupo de renormalização, realizado em uma dimensão em [33], [34]. Também foi demonstrado matematicamente, no caso de alta desordem, a existência do unitário quasi-local para uma cadeia linear de Ising com campo transversal [35]. Uma das propriedades marcantes do modelo de l-bits é a dinâmica da entropia, a qual vamos estudar.

### 2.2.1 Evolução temporal da entropia no modelo efetivo

Para encontrar a dependência temporal da entropia, vamos expressar estados em termos de auto-estados de  $\tau_i^z$ :  $|\nearrow\rangle, |\searrow\rangle$ . É bom ressaltar que auto-estados de  $\tau_{zi}$  não implicam em estados com  $\sigma_i^z$  bem definidos e vice-versa. Considere o seguinte estado inicial, no qual subdividimos em  $A$  e  $B$ :

$$|\Psi(0)\rangle = \left| \left\{ \nearrow \nearrow \dots \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\nearrow + \searrow) \right]_i \dots \nearrow \nearrow \dots \right\}_A \left\{ \nearrow \nearrow \dots \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\nearrow + \searrow) \right]_j \dots \nearrow \nearrow \dots \right\}_B \right\rangle, \quad (2.27)$$

ou seja, consideramos um estado inicial onde os l-bits  $i$  e  $j$  irão precessar sobre a dinâmica de  $H_{eff}$ , enquanto outros spins evoluirão trivialmente. Desprezando o termo de campo magnético (que não gera emaranhamento entre l-bits), podemos escrever o hamiltoniano efetivo entre  $i$  e  $j$  como:

$$H_{ij}^{eff} = J_{ij}^{eff} \tau_i^z \tau_j^z, \quad (2.28)$$

onde:

$$J_{ij}^{eff} = \tilde{J}_{ij} + \sum_{i < k < j} \tilde{K}_{ijk} \tau_k^z + \dots, \quad (2.29)$$

como, para todos os termos acima há um decaimento exponencial, deve haver uma escala  $\xi'$ , tal que [1]:

$$J_{ij}^{eff} \propto J_0 e^{-|i-j|/\xi'}. \quad (2.30)$$

Notando que podemos escrever o estado inicial como:

$$|\Psi(0)\rangle = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle + |\swarrow\rangle) \right]_i \otimes \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle + |\swarrow\rangle) \right]_j \otimes_k^{N-2} |\nearrow\rangle_k \equiv |\Psi_{ij}(0)\rangle \otimes_k^{N-2} |\nearrow\rangle_k , \quad (2.31)$$

vamos apenas evoluir o par de spins  $i$  e  $j$ , dado que a evolução temporal de outros spins apenas gerarão fases globais:

$$|\Psi_{ij}(t)\rangle = e^{-iH^{eff}t} |\Psi_{ij}(0)\rangle = e^{-iH_{ij}^{eff}t} \frac{1}{2} [|\nearrow\nearrow\rangle + |\nearrow\swarrow\rangle + |\swarrow\nearrow\rangle + |\swarrow\swarrow\rangle]_{ij} \quad (2.32)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ e^{-iJ_{ij}^{eff}t} |\nearrow\nearrow\rangle + e^{iJ_{ij}^{eff}t} |\nearrow\swarrow\rangle + e^{iJ_{ij}^{eff}t} |\swarrow\nearrow\rangle + e^{-iJ_{ij}^{eff}t} |\swarrow\swarrow\rangle \right]_{ij} . \quad (2.33)$$

Para calcular a entropia  $S_A(t)$ , devemos considerar a matriz densidade reduzida:

$$\rho_A(ij)(t) = \text{Tr}_B |\Psi_{ij}(t)\rangle \langle \Psi_{ij}(t)| = {}_j \langle \nearrow | \Psi_{ij}(t) \rangle \langle \Psi_{ij}(t) | \nearrow \rangle_j + {}_j \langle \swarrow | \Psi_{ij}(t) \rangle \langle \Psi_{ij}(t) | \swarrow \rangle_j , \quad (2.34)$$

onde utilizamos o fato que apenas o spin  $j$  está presente em  $B$ . Computando os produtos acima, é possível calcular  $\rho_A(ij)$ :

$$\rho_A(ij)(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(2J_{ij}^{eff}t) \\ \cos(2J_{ij}^{eff}t) & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.35)$$

para uma escala de tempo que há defasagem, ou seja,  $J_{ij}^{eff}t \sim 1$ , temos, ao substituir a eq. (2.30):  $|i - j|(t) \sim \xi' \log(J_0 t)$ . Como  $S_A(t) \sim \text{vol}(\partial A) \sim |i - j|$ , temos:

$$S_A(t) \sim \xi' \log(J_0 t) , \quad (2.36)$$

mostrando que a entropia cresce de maneira logarítmica no tempo. Vale notar que a expressão acima vale para tempos intermediários: Há um período transiente inicial, correspondente a  $J_0 t \ll 1$ , que não é descrito pela equação acima. Para  $J_0 t \gg 1$ , como  $|i - j|$  é limitado pelo tamanho máximo do sistema, numericamente é esperado uma saturação  $S_A(\infty) \propto L$  [1]. Para casos onde há termalização, há evidência numérica de um transporte balístico da entropia [36], ou seja:

$$S_A(t) \sim vt , \quad (2.37)$$



com uma saturação também do tipo  $S_A(\infty) \propto L$ . Ou seja, é possível, pelo comportamento intermediário da entropia de emaranhamento, também indentificar a presença de uma fase localizada.

# Capítulo 3

## Sistemas de Floquet e Cristais temporais

### 3.1 Formalismo de sistemas de Floquet

Sistemas quânticos de Floquet são hamiltonianos periódicos no tempo:

$$H(t) = H(t + T) , \quad (3.1)$$

para um determinado período  $T$ . Para estes sistemas, não há conservação de energia, pois  $\partial_t \langle H(t) \rangle \neq 0$ . Logo, conceitos como auto-estados devem ser revisitados. Considere o operador de evolução temporal:

$$U(t) = \mathcal{T} \exp \left[ -i \int_0^t dt' H(t') \right] , \quad (3.2)$$

onde  $\mathcal{T}$  indica ordenamento temporal. Definimos os auto-estados de Floquet  $|u_n\rangle$  como auto-vetores do operador de Floquet, definindo como  $U_F = U(T)$ :

$$U_F |u_n\rangle = \lambda_n |u_n\rangle . \quad (3.3)$$

Supomos que podemos expressar o operador de Floquet como:

$$U(T) = \exp(-iTH_F) , \quad (3.4)$$

ou seja, temos um hamiltoniano independente do tempo que descreve a dinâmica em um período. O denominamos de *hamiltoniano de Floquet*. Substituindo a equação acima na

eq. (3.3), nota-se que  $|u_n\rangle$  pode ser considerado um auto-estado de  $H_F$ , ao escolher  $\lambda_n$  como uma fase apropriada (pois são autovalores de operadores unitários):

$$\lambda_n = e^{-iT\mu_n} \Rightarrow H_F|u_n\rangle = \mu_n|u_n\rangle, \quad (3.5)$$

obtendo uma equação de Schrödinger independente do tempo. Porém, os valores  $\mu_n$ , denominados de *quasi-energias*, não são únicos: Nota-se que, ao fazer  $\mu_n \rightarrow \mu_n + m\Omega$ , onde  $\Omega = 2\pi/T$  é a frequência associada ao período de condução e  $m \in \mathbb{Z}$ , obtém-se o mesmo auto-valor.

Esta propriedade é completamente análoga a teoria de Bloch para potenciais periódicos no espaço [37], onde são obtidos *quasi-momentos* a partir da simetria de translação espacial discreta do problema [38]. Motivados por esta analogia, é possível definir a *primeira zona de Brillouin* para as quasi-energias, que escolhemos em  $[-\Omega, \Omega]$ .

Sistemas de Floquet possuem aspectos exóticos, como, por exemplo, são utilizados para o estudo de isolantes topológicos fora do equilíbrio [39] e de anyons em sistemas de átomos frios por uma condução periódica [40]. Porém, para sistemas sem desordem, há forte evidência de características ergódicas: Estados iniciais termalizam para estados de infinita temperatura [41],[42]. Na linguagem de operadores de densidade:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t) \sim \lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_{Gibbs} = \mathbb{I}Z^{-1}, \quad (3.6)$$

onde  $\mathbb{I}$  é a identidade definida no espaço de Hilbert, e " $\sim$ " é um limite assintótico em  $t \sim \tau$ , onde  $\tau$  é chamado de tempo de termalização. Apesar desta propriedade, que aparenta indicar fases triviais nestes sistemas, os mesmos apresentam uma fase dinâmica, denominados *cristais temporais*, em situações onde há desordem nestes sistemas. Esta situação é tratada na próxima seção.

## 3.2 Cristais temporais

Cristais temporais quânticos foram introduzidos primeiramente por Wilczek em [16], no contexto do equilíbrio termodinâmico: Foi postulado que, para hamiltonianos estáticos, existiria algum observável  $\Phi$  e estado  $|\Psi\rangle$  que quebrasse a simetria temporal contínua de  $H$ . A analogia feita é com cristais espaciais clássicos unidimensionais: Ao considerar um sistema de íons interagindo via lei de Coulomb satisfaz a simetria  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{R}$ , onde  $\mathbf{r}_i$  são

as posições iônicas e  $\mathbf{R}$  é arbitrário. Porém, na fase cristalina, esta simetria é reduzida para  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + na\mathbf{x}$ , onde  $a$  é a constante de rede e  $n$  é um inteiro [37].

Porém, foi demonstrado por Watanabe et al em [17] que, para estados fundamentais ou em temperatura finita, a quebra de simetria temporal não é possível. (apesar de haver uma discussão sobre a demonstração no caso de temperatura finita, ver Apêndice A de [43]) Conhecido como o "no-go theorem", todo o pressuposto tratado se baseava no equilíbrio termodinâmico. Else et al, em [18], [44], mostrou que há como cristais temporais emergirem de um sistema de um Floquet. A definição formal utilizada foi de *quebra de simetria de translação temporal*, que iremos denominar como a sigla TTSB (do inglês "Time-Translation Symmetry Breaking"): TTSB ocorre quando há um operador  $\Phi$  e um estado  $|\psi(t_1)\rangle$  que satisfazem:

$$\langle \psi(t_1 + T) | \Phi | \psi(t_1 + T) \rangle \neq \langle \psi(t_1) | \Phi | \psi(t_1) \rangle , \quad (3.7)$$

onde  $|\psi(t_1 + T)\rangle = U(T)|\psi(t_1)\rangle$ . Há outra condição sobre os estados, os mesmos devem satisfazer a condição de *correlações de curto alcance* para todo operador local  $\Phi(x)$ :

$$\langle \Phi(x)\Phi(x') \rangle_\psi - \langle \Phi(x) \rangle_\psi \langle \Phi(x') \rangle_\psi \rightarrow 0 , \quad (3.8)$$

para  $|x - x'| \rightarrow \infty$  e  $\langle \cdots \rangle_\psi$  é o valor esperado no estado  $|\psi(t_1)\rangle$ . Para sistemas de spin, o foco neste trabalho, esta condição está relacionada a estados "físicos": por exemplo, em uma dimensão, o estado de Néel  $|\uparrow\downarrow\uparrow\cdots\rangle$  satisfaz esta condição, enquanto um estado do tipo:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\downarrow\uparrow\cdots\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\rangle] , \quad (3.9)$$

não satisfaz para  $\Phi_i = \sigma_i^z$ . A definição da eq. (3.7) ainda pode ser mais específica: Geralmente,  $\phi(t) \equiv \langle \psi(t) | \Phi | \psi(t) \rangle$  possui oscilações com um período  $\tau_\phi$ . Este deve satisfazer duas condições que também devem ser verificadas em um cristal temporal [45], [46]:

- **Rigidez:** Se tivermos o hamiltoniano  $H(t; \{\alpha\})$ , onde  $\{\alpha\}$  são os parâmetros do sistema,  $\phi(t)$  deve possuir um período  $\tau_\phi$  para uma região finita do espaço de parâmetros, ou seja, se  $\phi(t + \tau_\phi; \{\alpha\}) = \phi(t; \{\alpha\})$ , então deve existir um  $\delta\alpha$  tal que:  $\phi(t + \tau_\phi; \{\alpha + \delta\alpha\}) = \phi(t; \{\alpha + \delta\alpha\})$  ;

- **Estabilidade:** A periodicidade  $\tau_\phi$  deve persistir no limite termodinâmico  $N \rightarrow \infty$ , para tempos arbitrários. Esta condição pode ser estudada como um pico persistente na transformada de Fourier  $\tilde{\phi}(\omega)$  em  $\omega_\phi = 2\pi/\tau_\phi$ .

O caso onde  $\tau_\phi = nT$ , com  $n > 1$ , é denominado cristal temporal discreto, e  $n$  geralmente está conectado com condições de simetria, com a possibilidade de definir o comportamento de cristais temporais a partir da estrutura espectral do operador de Floquet [47], abordagem que não tratamos aqui.

Cristais temporais discretos foram estudados em duas abordagens diferentes, ambos mecanismos responsáveis por evitar a termalização em estados de infinita temperatura em sistemas periódicos [45],[48],[49],[50]:

- Se há forte desordem no sistema, termalização não ocorre, e o sistema entra em uma fase localizada, e quebra de simetria temporal é possível;
- Para escalas de tempo  $t \ll \tau$ , e para altas frequências de condução  $\Omega$ , o sistema entra em uma fase pré-termal, onde pode exibir quebra de simetria temporal anteriormente a termalização.

Analisaremos o primeiro caso na próxima seção. Vale mencionar o caso de modelos com interações de longo e infinito alcance, que também podem exibir TTBS [46], e recentemente foi encontrado períodos fracionais [51].

### 3.2.1 Cristais temporais localizados: Evitando termalização com desordem

A termalização de um sistema interagente, como já discutido, ocorre quando  $\rho(t) \rightarrow \rho_{Gibbs}$  para  $t \sim \tau$ . Porém, sistemas com desordem exibem um comportamento anômalo, onde  $\rho(t)$  não possuem um tempo de termalização e o estado se mantém fora do equilíbrio, como discutido no capítulo anterior. Por meio de um exemplo, estudaremos como essa fase pode induzir cristais temporais. Considere o seguinte sistema de Floquet unidimensional, tratado na ref. [45]:

$$H(t; J_z, W, \epsilon) = \begin{cases} H_1 \equiv (\frac{\pi}{2} - \epsilon) \sum_i \sigma_i^x, & 0 < t < T/2 \\ H_2 \equiv \sum_i J_i^z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + B_i^z \sigma_i^z, & T/2 < t < T \end{cases} \quad (3.10)$$

onde tomamos  $T = 2$ .  $B_i^z$  e  $J_i$  são acoplamentos aleatórios e uniformes, nos intervalos  $[0, W]$  e  $[J_z - 0.2J_z, J_z + 0.2J_z]$  respectivamente. O operador de Floquet será:

$$U_F = U(T) = \exp \left[ -i \sum_i (J_i^z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + B_i^z \sigma_i^z) \right] \exp \left[ -i \left( \frac{\pi}{2} - \epsilon \right) \sum_i \sigma_i^x \right] \equiv U_2 U_1, \quad (3.11)$$

Consideramos o caso onde  $W = 2\pi$ . Em  $\epsilon = 0$  é possível analisar a evolução temporal analiticamente: considere o operador de evolução temporal  $U_1$ :

$$U_1 = \exp \left[ -i\pi/2 \sum_i \sigma_i^x \right] = \prod_i e^{-i\pi/2 \sigma_i^x} = \prod_i (-i\sigma_i^x) = (-i)^N \prod_i \sigma_i^x, \quad (3.12)$$

seja agora  $|\psi(0)\rangle$  os possíveis estados iniciais que satisfaçam a condição da eq. (3.8) com spins alinhados na direção  $z$ :

$$|\psi(0; \{\sigma_i\})\rangle = \otimes_i |\sigma_i\rangle, \quad (3.13)$$

onde  $\sigma_i^z |\sigma_i\rangle = \sigma_i |\sigma_i\rangle$ . Logo, o efeito do unitário  $U_1$  é um flip global nos spins com uma fase:

$$U_1 |\psi(0; \{\sigma_i\})\rangle = (-i)^N |\psi(0; \{-\sigma_i\})\rangle, \quad (3.14)$$

o efeito do unitário  $U_2$  também será uma fase, dado que  $|\psi(0; \{\sigma_i\})\rangle$  é um autoestado de  $H_2$ :

$$U_2 |\psi(0; \{-\sigma_i\})\rangle = e^{-iE\{-\sigma_i\}} |\psi(0; \{-\sigma_i\})\rangle, \quad (3.15)$$

onde  $E\{-\sigma_i\} = \sum_i J_i^z \sigma_i \sigma_{i+1} - B_i^z \sigma_i$ . Logo, o efeito da evolução temporal inteira é um flip global de todos os spins, acompanhado com uma fase:  $|\psi(T; \{\sigma_i\})\rangle \propto |\psi(0; \{-\sigma_i\})\rangle$ . Este caso mais simples é denominado de evolução *spin-echo* [45], e é o caso canônico de cristais temporais discretos, pois, note que, para dois períodos, temos, para a função de correlação  $R(t) = \langle \sigma_i^z(t) \sigma_i \rangle$ :

$$R(2T) = \langle \psi(0; \{\sigma_i\}) | U_F^2 \sigma_i^z U_F^2 \sigma_i^z | \psi(0; \{\sigma_i\}) \rangle = \sigma_i \langle \psi(2T; \{\sigma_i\}) | \sigma_i^z | \psi(2T; \{\sigma_i\}) \rangle = \sigma_i^2 = R(0), \quad (3.16)$$

obtendo quebra de simetria temporal. Para demonstrar que estas oscilações satisfazem a condição de rigidez, consideramos o caso onde as oscilações são imperfeitas  $\epsilon \neq 0$ , e a dependência da intensidade das interações de troca  $J_z \neq 0$ , porém ainda  $\epsilon, J_z \ll 1$ . É esperado que as oscilações se mantenham para a fase cristalina possua um diagrama de fase finito.

Resultados na fase cristalina estão na figura 3.1. Na ref. [48], foi computado um diagrama de fase para este modelo, com três fases: uma fase com quebra de simetria temporal e localizada, uma fase localizada sem a quebra de simetria, e uma fase onde o sistema termaliza. Para a análise da transição entre as fases localizadas, foi analisada o espectro das oscilações. Como é possível perceber na figura 3.1b, na ausência de interações e na presença de imperfeições no *flip* dos spins, há uma divisão no pico em torno de  $\Omega/2$ , indicando uma defasagem das oscilações, e logo, indica que para  $(\epsilon = 0.2, J_z = 0)$ , não há mais um cristal temporal.

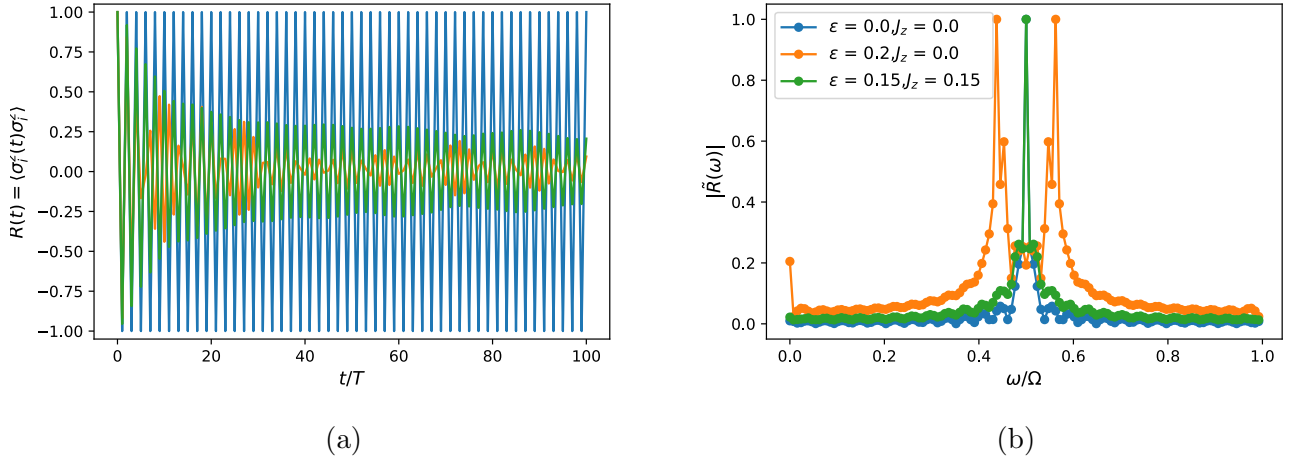


Figura 3.1: Evolução temporal e espectro da função de auto-correlação, com a média tomada em 100 realizações de desordem. (a)  $R(t) = \langle \sigma_i^z(i) \sigma_i^z(0) \rangle$  para alguns parâmetros: O caso  $\epsilon = J_z = 0$  (em azul) indica as oscilações "perfeitas", e ao introduzir imperfeições  $\epsilon = 0.2, J_z = 0$  (em laranja) há uma defasagem, não ocorrendo a quebra de simetria temporal. Quando interações são introduzidas,  $\epsilon = 0.15, J_z = 0.15$ , as oscilações são estabilizadas com o período de  $2T$ , (b) Módulo da transformada de Fourier de  $R(t)$ , normalizada pelo máximo do pico da evolução "spin echo", que se sobrepõe ao caso integrante. Nota-se a defasagem no caso de  $\epsilon = 0.2, J_z = 0$ . Para detalhes da simulação, ver a seção 4.1.

Uma propriedade marcante da quebra de simetria temporal da fase localizada é que não há dependência de estados iniciais específicos na eq. (3.13). Isto possui origem no hamiltoniano com desordem  $H_2$  (porém integrável): a localização de muitos corpos, com certas excessões [52], ocorre em todo o espectro de energia [53], logo, para todas as configurações  $\{\sigma_i\}$  possíveis.



# Capítulo 4

## Dinâmica da entropia e estabilidade das oscilações

### 4.1 O modelo e metodologia

O modelo estudado é uma variação do considerado na ref. [45] na eq(3.10), onde incluímos termos transversais em  $H_2$ , considerando o caso "spin-echo"(sem imperfeições):

$$H = \begin{cases} H_1 \equiv \frac{\pi}{2} \sum_i \sigma_i^x, & 0 < t < T/2 \\ H_2 \equiv J \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_{i+1} + h_i \sigma_i^z, & T/2 < t < T \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $h_i \in (-h, h)$  em uma distribuição uniforme, com intensidade fixada em  $h = 10$ . Trabalharemos também em duas geometrias diferentes, como ilustrado na figura 4.1, a geometria da rede escada e uma cadeia linear.

Uma análise do modelo de Heisenberg na rede escada, o hamiltoniano  $H_2$ , já foi realizada na literatura no contexto da localização de muitos corpos [31], encontrando uma transição de uma fase termal para localizada em  $h_c = 8.5 \pm 0.5$ , via estudos da entropia em seus auto-estados. Vale notar que este ponto crítico não necessariamente pode ser o mesmo no sistema de Floquet: A escolha de  $h = 10$  (alta desordem) é para garantir que o sistema está na fase localizada.

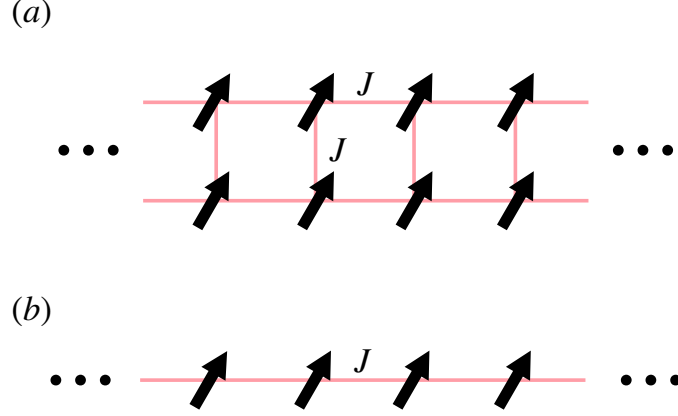


Figura 4.1: As duas geometrias consideradas, ambas em condições de contorno periódicas. (a): Geometria da rede escada, onde as interações de troca da cadeia superior é igual a da cadeia inferior; (b): Cadeia linear de spins.

Para estudos numéricos realizados neste capítulo (e também os gráficos da figura 3.1), foi utilizado a biblioteca `QuSpin` [54],[55], tanto para a evolução temporal e diagonalização exata. Um fluxograma ilustrado dos códigos está na figura 4.2. Computa-se a parte de "spin flip"  $H_1$ , e informamos o valor da intensidade da desordem  $h = 10$ , computando os  $N$  campos  $h_i$  a partir da distribuição uniforme em  $(-h, h)$ , enquanto variamos a constante de troca  $J$ .

Após computar o segundo hamiltoniano  $H_2$ , definido para cada rede considerada, diagonalizamos, utilizando o algoritmo de Lanczos, no estado com densidade de energia mais próximo de  $\epsilon = 0.5$ , onde encontramos a densidade para uma energia  $E$  a partir da relação [31]:

$$\epsilon(E) = \frac{E - E_0}{E_{max} - E_0}, \quad (4.2)$$

onde  $E_{max}$  é a energia máxima para um determinado  $N$  e  $E_0$  é a energia do estado fundamental. Como não estamos interessados em nenhuma propriedade da transição termal-localizada, consideramos  $N = 14$  fixo, tanto para a rede escada e para o caso unidimensional. O estado encontrado desta diagonalização,  $|\psi_\epsilon(0)\rangle$ , foi então utilizado para o estudo temporal das observáveis. Após calcular o unitário de evolução (de maneira apropriada para cada observável), para cada realização de desordem foi encontrado a

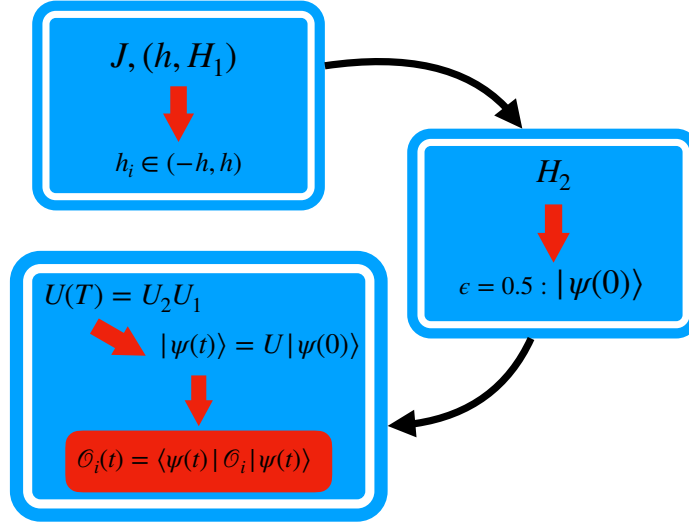


Figura 4.2: Fluxograma do algoritmo para uma realização de desordem, explicação no texto principal.

amplitude correspondente  $\mathcal{O}_i(t)$ , avaliado em tempos estroboscópicos, ou seja, apenas em múltiplos inteiros do período de Floquet:  $t = nT$ . Na maioria dos estudos, foi considerado até  $n_{max} = 100$  períodos. Após realizar todas as realizações de desordem, computamos observáveis de acordo com a média:

$$\overline{\mathcal{O}}(t) = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} \mathcal{O}_i(t) , \quad (4.3)$$

onde  $N_d$  é o número de realizações de desordem, cujo número depende da observável e fase de interesse. Para os cálculos realizados aqui,  $N_d = 100$  foi suficiente para observar os efeitos considerados (salvo indicação em contrário).

## 4.2 Amplitudes das oscilações na fase tempo-cristalina

Temos garantia da existência de oscilações para cristais temporais se, para os auto-estados encontrados na densidade de energia  $\epsilon$ ,  $|\psi_\epsilon(0)\rangle$ , sejam do tipo:

$$|\psi_\epsilon(0)\rangle \approx \otimes_i |\sigma_i\rangle , \quad (4.4)$$

ou seja, possuam  $S_A(\psi_\epsilon) \approx 0$ . É possível relaxar a condição acima: Temos garantia de obter oscilações, considerando estados que satisfaçam a eq. (3.8) e cujos estados após o *spin-flip*, descrito pelo unitário  $U_1$ , também sejam de curto alcance. Na próxima seção,

iremos discutir como ligar a entropia de estados iniciais com as oscilações na função de correlação  $R(t) = \langle \sigma^z(t) \sigma^z(0) \rangle$ , calculada no spin localizado em  $i = N/2$  (para o caso unidimensional), e na fronteira da região  $\partial A = N/2$  para o caso na rede escada, em vários valores de  $J$ . Os resultados para a rede escada e o caso unidimensional estão organizados na fig. 4.3.

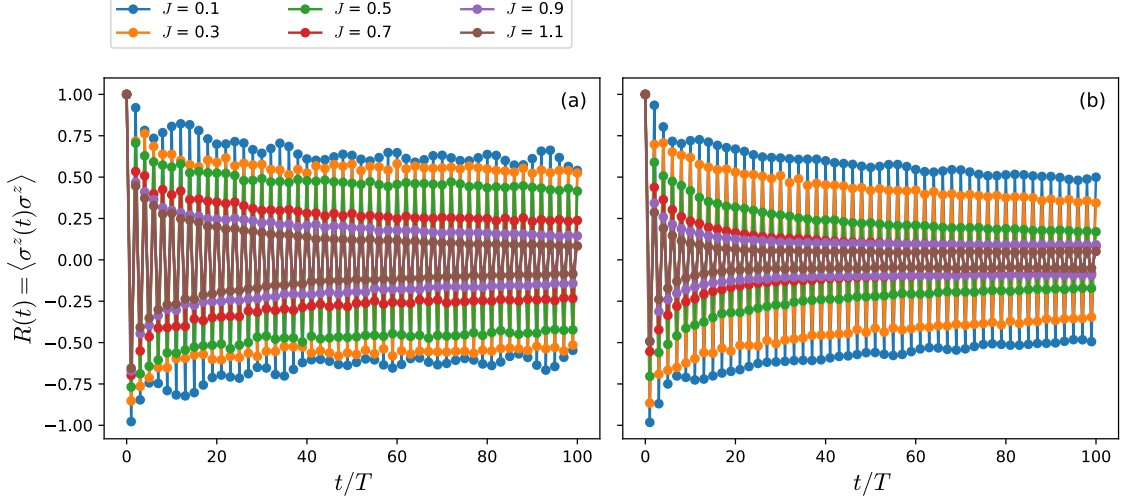


Figura 4.3: Função de correlação  $R(t) = \langle \sigma^z(t) \sigma^z(0) \rangle$ , para  $n_{max} = 100$  ciclos de Floquet. (a): caso unidimensional, (b): caso na rede escada, onde as amplitudes de saturação são menores.

Em ambos os casos, há um período transiente, onde há um decaimento da amplitude até um valor constante que permanece nas escalas de tempo consideradas (ver seção 4.3 para a discussão sobre a amplitude de saturação), que se torna particularmente visível para  $J \gtrsim 0.3$ . Porém, para o caso na rede escada em (b), é possível ver que as amplitudes finais são menores do que na cadeia linear em (a), indicando que as oscilações características são mais estáveis no caso unidimensional.

Para verificar esta propriedade, comparamos ambas as amplitudes no tempo máximo  $t_{max} = n_{max}T = 100T$ , verificando que, para todos os valores  $J$  analisados, as amplitudes de saturação se mantiveram maiores na cadeia linear, e para  $J \gtrsim 0.9$ , se tornam próximas (ver fig. 4.4)

Para verificar a condição de estabilidade comentada na seção 3.2, também consideramos a transformada de Fourier em tempos estroboscópicos da função de correlação:

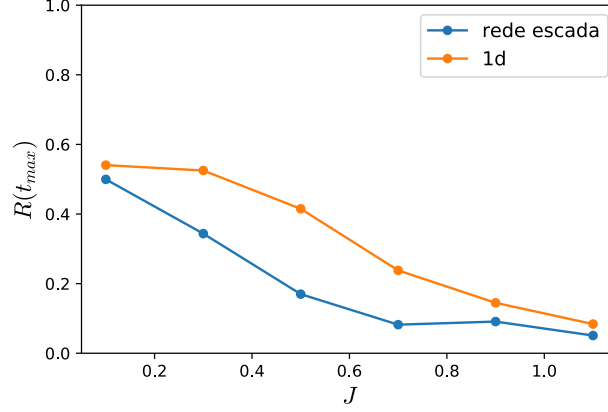


Figura 4.4: A amplitude de saturação  $R(t_{max})$ , no caso da rede escada e o caso unidimensional.

$$R(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{n_{max} + 1}} \sum_{n=0}^{n_{max}} R(nT) e^{-i\omega nT} = \frac{1}{\sqrt{n_{max} + 1}} \sum_{n=0}^{n_{max}} \langle \sigma^z(nT) \sigma^z(0) \rangle e^{-i\omega nT}, \quad (4.5)$$

onde a transformada foi calculada em  $n_{max} + 1$  pontos para incluir  $t = 0$ . Os resultados estão organizados na fig. 4.5. Em ambos os casos, há estabilidade: Apesar da intensidade dos picos diminuir conforme a intensidade das interações aumentam, há a componente espectral fixa em  $\omega = \Omega/2$ .

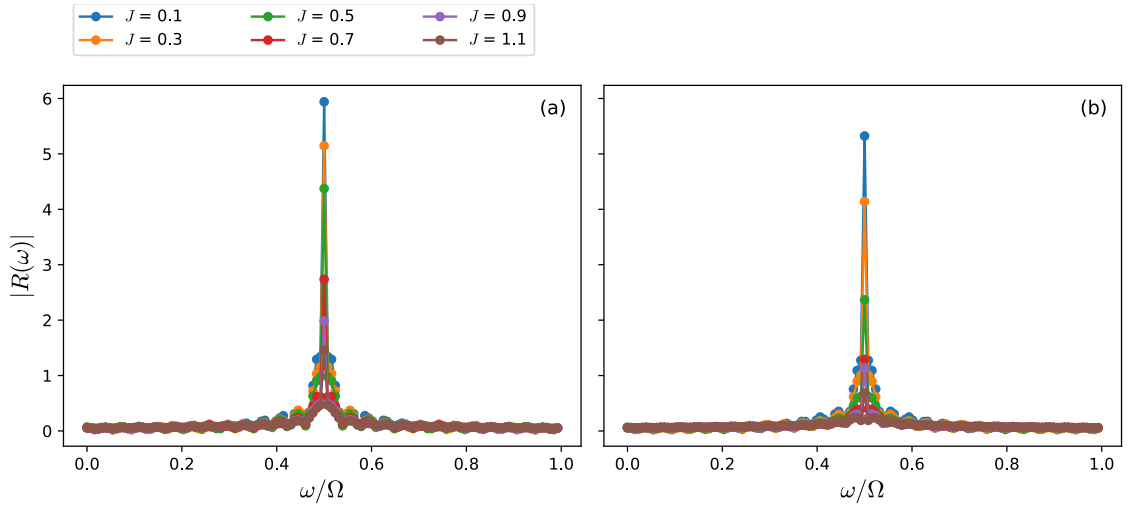


Figura 4.5: Módulo da transformada de Fourier definida na eq. 4.5. (a): caso unidimensional, (b): caso na rede escada, com picos de menor intensidade. Em ambos os casos, há um pico bem definido em  $\omega = \Omega/2$  para todos os valores de  $J$ , uma assinatura visível da fase de cristal temporal.

Nota-se que as últimas três curvas para o caso da rede escada em  $J = 0.7, 0.9, 1.1$  saturam para valores próximos, enquanto que no caso unidimensional, isso não ocorre, como é possível ver pela figura 4.6. É possível entender esse comportamento a partir da dinâmica da entropia, como veremos na próxima seção.

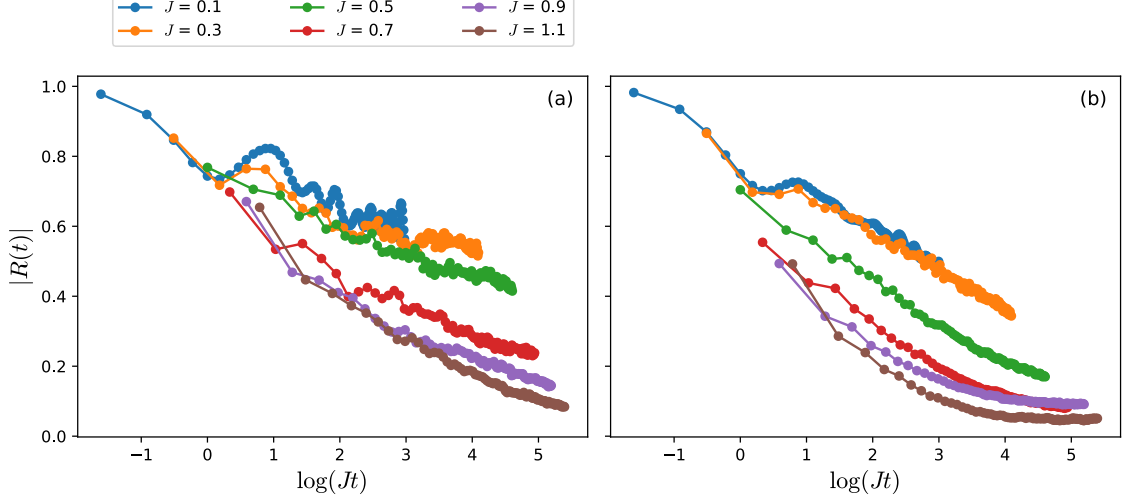


Figura 4.6: Evolução de  $R(t)$  em relação à  $\log(Jt)$ . (a): caso unidimensional, (b): caso na rede escada. É notável a saturação nas três últimas curvas para o caso da rede escada.

### 4.3 Dinâmica da entropia

Realizamos um estudo da densidade de entropia de emaranhamento,  $s_A \equiv S_A/N_A$  com  $|A| = L/2$  (onde, para o caso da rede escada,  $L$  é o comprimento linear):

$$s_{L/2}(t) = -\frac{1}{N_{L/2}} \text{Tr} [\rho_{L/2}(t) \log \rho_{L/2}(t)] , \quad (4.6)$$

primeiramente, analisamos as densidades de entropias para os estados iniciais,. Foi computado a densidade da entropia de emaranhamento para cada  $J$ ,  $s_{L/2}(\psi_\epsilon)$ , em  $\epsilon = 0.5$ , em ambas as redes, como pode ser vista na figura 4.7.

Podemos interpretar esse resultado da seguinte maneira: Consideramos um sub-sistema  $A$  para ambas as redes. Imaginamos que estamos em um estado com *dimerizações* [56], ou seja, é uma superposição de tripletos  $S = 1$  um-a-um. Concretamos nos spins próximos da fronteira  $\partial A$  (que são dois para o caso da rede escada e um para o caso unidimensional). São estados da forma:

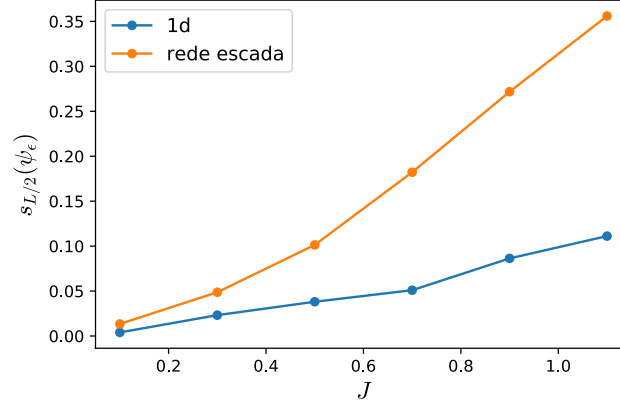


Figura 4.7: Entropias de emaranhamento para o auto-estado mais próximo de  $\epsilon = 0.5$ , para vários valores de  $J$  em ambos os casos. A entropia para o caso da rede escada se mantém maior.

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow_A \downarrow\rangle + |\downarrow_A \uparrow\rangle] , \quad (4.7)$$

onde usamos  $|\cdots\rangle_A$  para denotar o estado do spin na partição  $A$ , e o outro spin considerado é o próximo vizinho fora de  $A$ . Pictoricamente, ao medir a entropia no caso unidimensional, para uma das fronteiras há apenas uma dimerização medida, enquanto que no caso da rede escada, há duas dimerizações medidas, como ilustrado na figura [4.8](#).

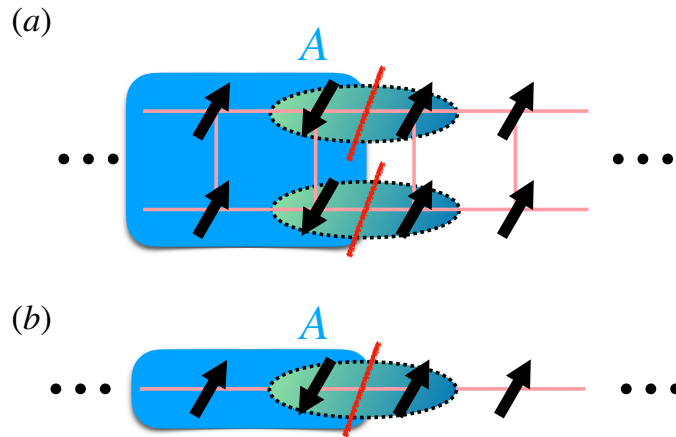


Figura 4.8: Ilustração do argumento da entropia em estados dimerizados: (a): caso da rede escada, (b): caso unidimensional, com um número menor de spins emaranhados na fronteira.

Como dimerizações são induzidas por interações, esperamos que a entropia aumente com  $J$ , como é observado. Vale notar que este argumento é de caráter fenomenológico: Não há garantia de obter, em várias realizações de desordem consideradas, estados cuja estrutura de emaranhamento são superposições da eq. (4.7).

Comparando com a figura 4.4, notamos que estados com  $S_A \approx 0$  possuem amplitudes mais próximas da inicial, e que há um decaimento maior para estados iniciais mais emaranhados. Evoluindo a matriz densidade  $\rho_{L/2}(t)$ , foi obtida a evolução temporal da densidade de entropia, como é possível observar na figura 4.9.

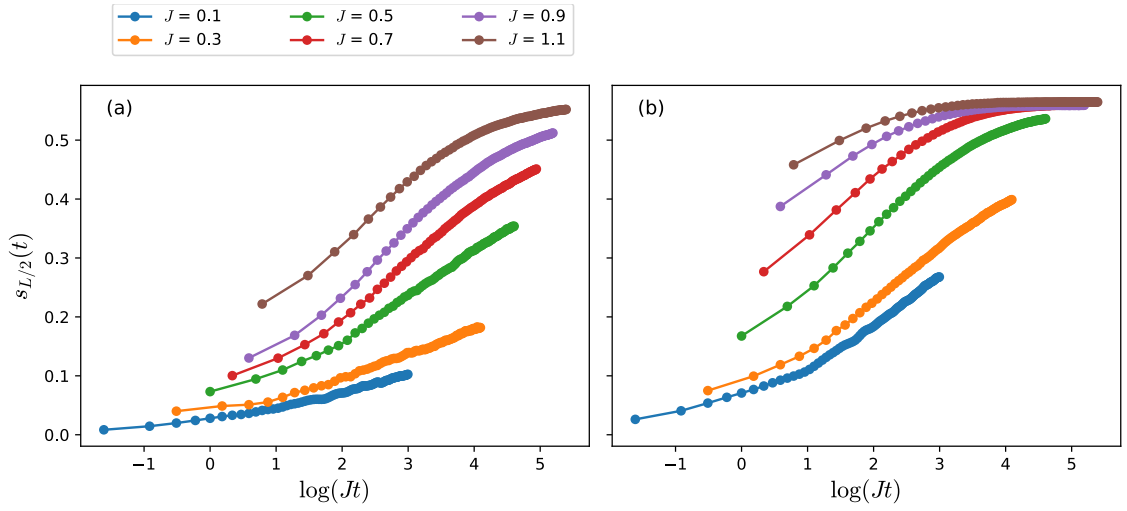


Figura 4.9: Evolução da entropia de emaranhamento em relação à  $\log(Jt)$ . (a): caso unidimensional, (b): caso na rede escada.

O comportamento da entropia pode ser entendido diretamente da fenomenologia da localização de muitos corpos, da eq. (2.36). Definindo um tempo adimensional  $\lambda = Jt$ , nos casos onde a interação é mais fraca, como pode ser visto para  $J = 0.1, 0.3, 0.7$  para o caso unidimensional e para  $J = 0.1, 0.3$  na rede escada, não chega no tempo característico de saturação, com um visível crescimento linear em  $\log(Jt)$ . Para valores de  $J$  maiores, a saturação ocorre, pois há um crescimento maior de  $\lambda$  conforme há evolução temporal, em combinação com uma maior entropia inicial.

Também é possível ver o papel da dimensionalidade: Para  $J = 0.1$ , temos estados com entropia similar, porém o crescimento no caso da rede escada é mais rápido. A combinação de estados iniciais com maior entropia e um rápido crescimento gera três situações onde é possível ver a entropia de saturação  $s_{L/2}(\infty) \approx 0.56$ . A implicação nas amplitudes das oscilações pode ser vista, ao analisar  $|R(t)|$ , ilustrado na figura 4.6: nas



escalas de tempo consideradas, apenas essas três situações há saturação da amplitude nas oscilações.

Fisicamente, em  $N \rightarrow \infty$ , a dinâmica logarítmica da entropia deveria continuar para tempos arbitrariamente grandes, e a saturação discutida é um efeito para sistemas finitos. Logo, a discussão acima leva a acreditar a existência de um tempo de saturação da amplitude para cristais temporais localizados, que depende da presença de interações e dimensionalidade, não prevista em analisar modelos onde  $H_2$  é integrável, como discutido na seção 3.2.1.

Porém, como os cálculos acima foram feitos em estados iniciais com alta entropia, que possuem uma saturação rápida. Para avaliar a possibilidade da existência desta saturação, no regime com altas interações, e escalas de tempo maiores até  $n_{max} = 500$  ciclos de Floquet, foi considerado estados iniciais com  $S_A = 0$ , ou seja, estados polarizados no eixo  $z$  descritos pela eq. (4.4), onde escolhemos  $\sigma_i = \pm 1$  de maneira aleatória para cada realização de desordem. O comportamento da amplitude das oscilações e do crescimento da entropia está presente na figura 4.10.

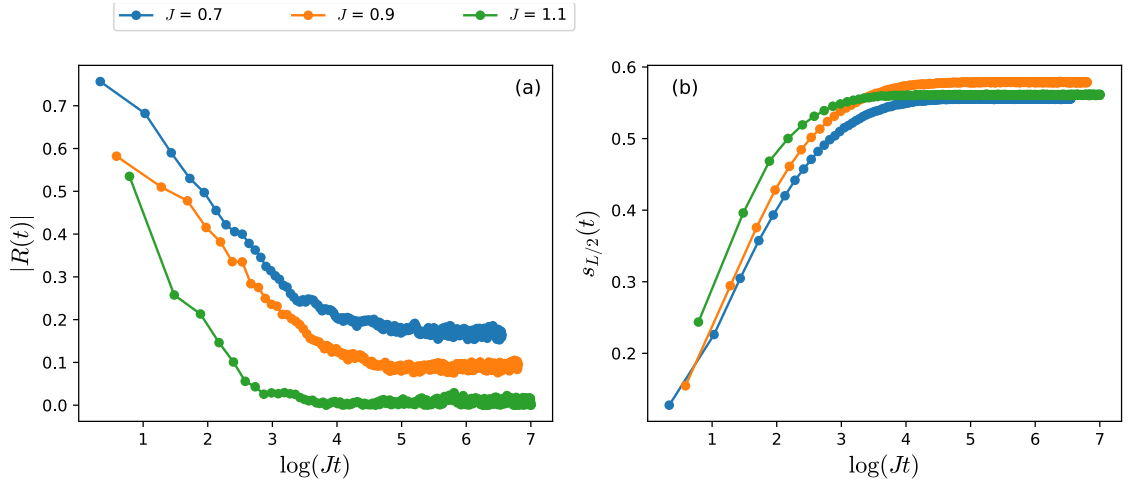


Figura 4.10: Estudo das oscilações para estados iniciais do tipo da eq. (4.4), com ambos os gráficos plotados em relação à  $\log(Jt)$ , média sobre  $N_d = 20$  realizações de desordem. (a): Amplitudes para os três valores de interações consideradas. Notamos que, para  $J = 1.1$ , já não há oscilações. (b): Dinâmica da entropia, com três saturações em tempos diferentes. O valor da saturação é diferente para as três curvas, que atribuímos a um número de realizações menor em comparação com as simulações realizadas anteriormente.

A explicação para amplitudes de saturação diminuírem até a ausência completa

em  $J = 1.1$  está nas propriedades espectrais de  $H_2$ : Ao aumentar  $J$ , as interações de Heisenberg introduzem flutuações transversais, enquanto o campo desordenado induz estados polarizados. Logo, mesmo para  $h \sim 10$ , em realizações onde  $h_i \ll J$ , há a possibilidade de ter estados emaranhados. Logo, neste caso, não há garantia de oscilações, pela discussão da seção 3.2. A intuição é confirmada pelo rápido crescimento da entropia dos auto-estados, na fig. (4.7), e pelo resultado já discutido que as amplitudes de saturação diminuem com o aumento da entropia. Entretanto, notamos que ainda há um tempo característico de saturação da amplitude, com correspondentes saturações da entropia em escalas de tempo similares.

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho, revisamos os conceitos de termalização e localização, focando nas propriedades de emaranhamento e exemplificamos a possibilidade de exibir fases da matéria no regime localizado, por meio de cristais temporais. Também demonstramos que, mesmo no regime simples de "spin-echo", ou seja, sem imperfeições, há a possibilidade de obter oscilações não-triviais quando há ausência de integrabilidade em  $H_2$ .

Foi estudado também como a evolução temporal das amplitudes e da entropia de emaranhamento dependem tanto da interação e da dimensionalidade do sistema, com a análise de uma rede quasi-unidimensional. Concluimos que há um tempo de saturação característico para ambas as quantidades, com uma saturação mais rápida para o caso da rede escada, tanto ligado a entropia dos estados fundamentais iniciais e também a características intrínsecas da dimensionalidade (ver, por exemplo, o caso onde  $J = 0.1$  na figura [4.9](#)).

Possíveis futuros estudos que podem ser realizados incluem verificar a dependência da evolução temporal da entropia em  $N$ , a uma análise mais detalhada no caso onde há desordem nas interações, e uma confirmação direta da presença da fase localizada nos parâmetros considerados por meio do estudo da *razão média de gaps adjacentes*  $r$  das quasi-energias, considerado o parâmetro de ordem para a transição da fase termal para a fase localizada [\[15\]](#).

# Apêndice A

## Transformação de Jordan-Wigner

Descreveremos como mapear um problema de spins  $\sigma_i^\alpha$  em férmions  $f_j$  (satisfazendo a relação de comutação  $\{f_i^\dagger, f_j\} = \delta_{ij}$ ) em uma dimensão, baseando-se na ref. [27]. Primeiramente, definimos os operadores "string":

$$B_j := \exp \left[ i\pi \sum_{i < j} n_i \right] = \exp \left[ i\pi \sum_{i < j} f_i^\dagger f_i \right] , \quad (\text{A.1})$$

que claramente são unitários:  $B_j^\dagger B_j = 1$ . A interpretação física desses operadores são que os mesmos descrevem "cordas" de férmions até o sítio  $j$ , e são de natureza não-local (para se construir  $B_j$  é necessário saber  $n_i$  de todos os sítios anteriores). A transformação de Jordan-Wigner é definida como:

$$\sigma_j^+ = B_j^\dagger f_j^\dagger , \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_j^- = f_j B_j , \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_j^z = 2f_j^\dagger f_j - 1 , \quad (\text{A.4})$$

onde  $\sigma_j^\pm = \sigma_j^x \pm i\sigma_j^y$ . É possível demonstrar que  $[B_j, f_k] = [B_j, f_k^\dagger] = 0$ , e também que as relações de comutação das matrizes de Pauli são recuperadas. O sistema de spin que estamos interessados são:

$$H = \sum_i (J^x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + J^y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J^z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) - \sum_i h_i \sigma_i^z , \quad (\text{A.5})$$

em termos dos operadores de spin transversais  $\sigma_i^\pm$ , e considerando  $J^x = J^y = J^{xy}$ , temos o chamado *modelo XXZ*:

$$H = \sum_i \left[ \frac{J^{xy}}{2} (\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^-) + J^z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right] - \sum_i h_i \sigma_i^z , \quad (\text{A.6})$$

Utilizando as eqs (A.2), (A.3), mostramos que os termos que induzem flutuações transversais a direção  $z$  se transformam em termos que descrevem o salto de um férmion de um sítio para outro:

$$\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- = f_i^\dagger f_{i+1} , \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_{i+1}^+ \sigma_i^- = f_{i+1}^\dagger f_i , \quad (\text{A.8})$$

os termo de troca na direção  $z$  se transformam em:

$$\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z = 4f_i^\dagger f_i f_{i+1}^\dagger f_{i+1} - 2(f_i^\dagger f_i + f_{i+1}^\dagger f_{i+1}) , \quad (\text{A.9})$$

(ignorando termos constantes). Logo, transformando todos os termos, A hamiltonana final é, em condições de contorno periódicas:

$$H = \frac{J^{xy}}{2} \sum_i (f_i^\dagger f_{i+1} + h.c) + 2 \sum_i (J^z - h_i) f_i^\dagger f_i + 2J^z \sum_i f_i^\dagger f_i f_{i+1}^\dagger f_{i+1} . \quad (\text{A.10})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Dmitry A Abanin, Ehud Altman, Immanuel Bloch, and Maksym Serbyn. Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement. *Reviews of Modern Physics*, 91(2):021001, 2019.
- [2] Jun John Sakurai and Eugene D Commins. Modern quantum mechanics, revised edition, 1995.
- [3] Philip W Anderson. More is different. *Science*, 177(4047):393–396, 1972.
- [4] Lev Davidovich Landau. On the theory of phase transitions. *Ukr. J. Phys.*, 11:19–32, 1937.
- [5] Sílvio RA Salinas. *Introdução a física estatística vol. 09*. Edusp, 1997.
- [6] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, 65(3-4):117, 1944.
- [7] Subir Sachdev. Quantum phase transitions. *Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials*, 2007.
- [8] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC Press, 2018.
- [9] Tom Lancaster and Stephen J Blundell. *Quantum field theory for the gifted amateur*. OUP Oxford, 2014.
- [10] Robert M White, Robert M White, and Bradford Bayne. *Quantum theory of magnetism*, volume 1. Springer, 1983.
- [11] Benito Groh and Bela Mulder. Why all crystals need not be bcc: Symmetry breaking at the liquid-solid transition revisited. *Physical Review E*, 59(5):5613, 1999.

- [12] Philip W Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review*, 109(5):1492, 1958.
- [13] Denis M Basko, Igor L Aleiner, and Boris L Altshuler. Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states. *Annals of physics*, 321(5):1126–1205, 2006.
- [14] Rahul Nandkishore and David A Huse. Many-body localization and thermalization in quantum statistical mechanics. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 6(1):15–38, 2015.
- [15] Arijeet Pal and David A Huse. Many-body localization phase transition. *Physical review b*, 82(17):174411, 2010.
- [16] Frank Wilczek. Quantum time crystals. *Physical review letters*, 109(16):160401, 2012.
- [17] Haruki Watanabe and Masaki Oshikawa. Absence of quantum time crystals. *Physical review letters*, 114(25):251603, 2015.
- [18] Dominic V Else, Bela Bauer, and Chetan Nayak. Floquet time crystals. *Physical review letters*, 117(9):090402, 2016.
- [19] Michael A Nielsen and Isaac Chuang. Quantum computation and quantum information, 2002.
- [20] Hyungwon Kim, Tatsuhiko N Ikeda, and David A Huse. Testing whether all eigenstates obey the eigenstate thermalization hypothesis. *Physical Review E*, 90(5):052105, 2014.
- [21] Robin Steinigeweg, Abdelah Khodja, Hendrik Niemeyer, Christian Gogolin, and Jochen Gemmer. Pushing the limits of the eigenstate thermalization hypothesis towards mesoscopic quantum systems. *Physical review letters*, 112(13):130403, 2014.
- [22] Tatsuhiko N Ikeda, Yu Watanabe, and Masahito Ueda. Finite-size scaling analysis of the eigenstate thermalization hypothesis in a one-dimensional interacting bose gas. *Physical Review E*, 87(1):012125, 2013.
- [23] Joshua M Deutsch. Eigenstate thermalization hypothesis. *Reports on Progress in Physics*, 81(8):082001, 2018.

- [24] Amy C Cassidy, Charles W Clark, and Marcos Rigol. Generalized thermalization in an integrable lattice system. *Physical review letters*, 106(14):140405, 2011.
- [25] Lev Vidmar and Marcos Rigol. Generalized gibbs ensemble in integrable lattice models. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2016(6):064007, 2016.
- [26] Ferdinand Evers and Alexander D Mirlin. Anderson transitions. *Reviews of Modern Physics*, 80(4):1355, 2008.
- [27] Piers Coleman. *Introduction to many-body physics*. Cambridge University Press, 2015.
- [28] Sheldon Goldstein, Joel L Lebowitz, Roderich Tumulka, and Nino Zanghi. Gibbs and boltzmann entropy in classical and quantum mechanics. *arXiv preprint arXiv:1903.11870*, 2019.
- [29] Jens Eisert, Marcus Cramer, and Martin B Plenio. Colloquium: Area laws for the entanglement entropy. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):277, 2010.
- [30] Maksym Serbyn, Zlatko Papić, and Dmitry A Abanin. Local conservation laws and the structure of the many-body localized states. *Physical review letters*, 111(12):127201, 2013.
- [31] Elliott Baygan, SP Lim, and DN Sheng. Many-body localization and mobility edge in a disordered spin-1 2 heisenberg ladder. *Physical Review B*, 92(19):195153, 2015.
- [32] David A Huse, Rahul Nandkishore, and Vadim Oganesyan. Phenomenology of fully many-body-localized systems. *Physical Review B*, 90(17):174202, 2014.
- [33] Ronen Vosk and Ehud Altman. Many-body localization in one dimension as a dynamical renormalization group fixed point. *Physical review letters*, 110(6):067204, 2013.
- [34] David Pekker, Gil Refael, Ehud Altman, Eugene Demler, and Vadim Oganesyan. Hilbert-glass transition: New universality of temperature-tuned many-body dynamical quantum criticality. *Physical review x*, 4(1):011052, 2014.



- [35] John Z Imbrie. On many-body localization for quantum spin chains. *Journal of Statistical Physics*, 163(5):998–1048, 2016.
- [36] Hyungwon Kim and David A Huse. Ballistic spreading of entanglement in a diffusive nonintegrable system. *Physical review letters*, 111(12):127205, 2013.
- [37] Krzysztof Sacha and Jakub Zakrzewski. Time crystals: a review. *Reports on Progress in Physics*, 81(1):016401, 2017.
- [38] Steven H Simon. *The Oxford solid state basics*. Oxford University Press, 2013.
- [39] Mikael C Rechtsman, Julia M Zeuner, Yonatan Plotnik, Yaakov Lumer, Daniel Podolsky, Felix Dreisow, Stefan Nolte, Mordechai Segev, and Alexander Szameit. Photonic floquet topological insulators. *Nature*, 496(7444):196, 2013.
- [40] Dong E Liu, Alex Levchenko, and Harold U Baranger. Floquet majorana fermions for topological qubits in superconducting devices and cold-atom systems. *Physical review letters*, 111(4):047002, 2013.
- [41] Luca DAlessio and Marcos Rigol. Long-time behavior of isolated periodically driven interacting lattice systems. *Physical Review X*, 4(4):041048, 2014.
- [42] Pedro Ponte, Anushya Chandran, Z Papić, and Dmitry A Abanin. Periodically driven ergodic and many-body localized quantum systems. *Annals of Physics*, 353:196–204, 2015.
- [43] Vedika Khemani, Roderich Moessner, and SL Sondhi. A brief history of time crystals. *arXiv preprint arXiv:1910.10745*, 2019.
- [44] Dominic V Else, Bela Bauer, and Chetan Nayak. Prethermal phases of matter protected by time-translation symmetry. *Physical Review X*, 7(1):011026, 2017.
- [45] Norman Y Yao, Andrew C Potter, I-D Potirniche, and Ashvin Vishwanath. Discrete time crystals: rigidity, criticality, and realizations. *Physical review letters*, 118(3):030401, 2017.
- [46] Angelo Russomanno, Fernando Iemini, Marcello Dalmonte, and Rosario Fazio. Floquet time crystal in the lipkin-meshkov-glick model. *Physical Review B*, 95(21):214307, 2017.

- [47] Curt W von Keyserlingk, Vedika Khemani, and Shivaaji L Sondhi. Absolute stability and spatiotemporal long-range order in floquet systems. *Physical Review B*, 94(8):085112, 2016.
- [48] Norman Y Yao and Chetan Nayak. Time crystals in periodically driven systems. *arXiv preprint arXiv:1811.06657*, 2018.
- [49] Tian-Sheng Zeng and DN Sheng. Prethermal time crystals in a one-dimensional periodically driven floquet system. *Physical Review B*, 96(9):094202, 2017.
- [50] Federica Maria Surace, Angelo Russomanno, Marcello Dalmonte, Alessandro Silva, Rosario Fazio, and Fernando Iemini. Floquet time crystals in clock models. *Physical Review B*, 99(10):104303, 2019.
- [51] Andrea Pizzi, Johannes Knolle, and Andreas Nunnenkamp. Higher-order and fractional discrete time crystals in clean long-range interacting systems. *arXiv preprint arXiv:1910.07539*, 2019.
- [52] Xiaopeng Li, Sriram Ganeshan, JH Pixley, and S Das Sarma. Many-body localization and quantum nonergodicity in a model with a single-particle mobility edge. *Physical review letters*, 115(18):186601, 2015.
- [53] Jan Šuntajs, J Bonča, Tomaz Prosen, and Lev Vidmar. Quantum chaos challenges many-body localization. *arXiv preprint arXiv:1905.06345*, 2019.
- [54] Phillip Weinberg and Marin Bukov. QuSpin: a Python Package for Dynamics and Exact Diagonalisation of Quantum Many Body Systems part I: spin chains. *SciPost Phys.*, 2:003, 2017.
- [55] Phillip Weinberg and Marin Bukov. QuSpin: a Python Package for Dynamics and Exact Diagonalisation of Quantum Many Body Systems. Part II: bosons, fermions and higher spins. *SciPost Phys.*, 7:20, 2019.
- [56] SR White, RM Noack, and DJ Scalapino. Resonating valence bond theory of coupled heisenberg chains. *Physical review letters*, 73(6):886, 1994.